Домашно №1, Задача 2 по Алгебра 2 на Компютърни Науки

Камен Димитров Младенов, Група 6

7 Април 2023

(i) Подточка

Ще покажем, че L е подгрупа на G, съгласно:

$$\forall a, b \in \mathbb{Z} : \ na + kb \in \mathbb{Z} \implies L \subseteq G$$

Тоест ще докажем, че $\forall l, m \in L \Rightarrow l.m \in L, m^{-1} \in L$.
Нека $l = g^{na_1+kb_1}, m = g^{na_2+kb_2}$ за произволни фиксирани $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$:

$$l.m = g^{na_1+kb_1} g^{na_2+kb_2} = g^{na_1+kb_1+na_2+kb_2} = g^{n(a_1+b_1)+k(a_2+b_2)}, \quad a_1 + b_1, a_2 + b_2 \in \mathbb{Z} \implies l.m \in L$$
$$m^{-1} = g^{-(na_2+kb_2)} = g^{-na_2-kb_2} = g^{n(-a_2)+k(-b_2)}, \quad -a_2, -b_2 \in \mathbb{Z} \implies m^{-1} \in L$$

(ii) Подточка

Ще покажем, че $L = \langle g^d \rangle$, тоест че $\{g^{na+kb} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} = \{g^{dp} \mid p \in \mathbb{Z}\}$.
Разглеждаме произволно g^{na+kb}:

$$d = \gcd(n, k) \Rightarrow \frac{n}{d} = n', \frac{k}{d} = k' \text{ за някои } n', k' \in \mathbb{N} \qquad na + kb = dn'a + dk'b = d(n'a + k'b)$$
$$n', k' \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow (n'a + k'b) \in \mathbb{Z}, \text{ тоест } g^{na+kb} = g^{d(n'a+k'b)} = g^{dp} \text{ за някое } p \in \mathbb{Z}$$

(iii) Подточка

Ще покажем, че $\langle g^n \rangle \cap \langle g^k \rangle = \langle g^m \rangle$, тоест че $\{g^{ni} \mid i \in \mathbb{Z}\} \cap \{g^{ki} \mid i \in \mathbb{Z}\} = \{g^{mi} \mid i \in \mathbb{Z}\}$.
Разглеждаме произволни g^{ni}, g^{ki}, g^{mi}:

$$m = \operatorname{lcm}(n, k) \Rightarrow \frac{m}{n} = n', \frac{m}{k} = k' \text{ за някои } n', k' \in \mathbb{N}$$
$$g^{mi} = g^{nn'i}, n' \in \mathbb{N}, i \in \mathbb{Z} \Rightarrow n'i \in \mathbb{Z} \Rightarrow g^{mi} = g^{nj} \text{ за някое } j \in \mathbb{Z}$$
$$\text{Абсолютно аналогично, следва че } g^{mi} = g^{kj} \text{ за някое } j \in \mathbb{Z}$$